

Undervisningsbeskrivelse

Termin	december 2011
Institution	Marie Kruses Skole
Uddannelse	Stx
Fag og niveau	Matematik B
Lærer	Jørgen Ebbesen
Hold	EMa 11

Oversigt over gennemførte undervisningsforløb

Titel 1	Den skriftlige dimension af faget
Titel 2	Vækst og vækstmodeller
Titel 3	Trekantsberegning
Titel 4	2. gradspolynomier, parabler og 2. gradsligninger
Titel 5	Differentiabilitet og tangent
Titel 6	Middelværdisætningen og monotoniforhold
Titel 7	Stamfunktioner, bestemte integraler og areal
Titel 8	Statistik og sandsynlighedsregning
Titel 9	Logaritme- og eksponentialfunktioner
Titel 10	Den mundtlige dimension af faget

Progression

Den faglige progression er ikke beskrevet under de enkelte emner. I matematik bygger et emne tit på de foregående og leder hen til de næste. En anden form for progressionen ligger desuden i, at konceptuelt vanskelige emner gemmes til sent i forløbet.. Rækkefølgen af forløbene skulle således gerne sikre progressionen. Af samme årsag er der ikke nogen iøjnespringende progression i arbejdsformer, idet de vanskeligere emner nødvendiggør en strammere lærerstyring.

Evaluering

Om de faglige mål er indfriet, er løbende blevet evalueret ud fra elevaktiviteten og kvaliteten af denne i timerne, ved tavleoverhøring og retning af skriftlige opgaver.

Eksperimentel matematik

Undervisningen har som hovedregel været planlagt, så eleverne har haft mulighed for at gætte de overordnede abstrakte regler ud fra konkrete eksempler. For det meste er de induktivt formulerede regler blevet fulgt til dørs med en aksiomatisk-deduktiv udledning.

Holdets arbejde i øvrigt

Holdet er et "turbohold", som har løftet matematik fra C-niveau i løbet af 10 undervisningsuger à 3 ugentlige aftener à 4 timer.

Anvendt litteratur

Hans Sloth: TRIP's matematiske GRUNDBOG, Forlaget TRIP 2005

Hans Sloth: TRIP's matematiske BOG 2, Forlaget TRIP 2006

[Retur til forside](#)

Titel 1	Den skriftlige dimension af faget
Indhold	<p>Det var introduktionsforløbet, hvor vi med udgangspunkt i eksamenssættet fra 24. maj 2011 indkredsede deltagerens forudsætninger. Siden supplerede vi med opgaver fra de sidste tre års eksamenssæt inden for nedenstående emner.</p> <p><i>Kernestof:</i></p> <p>Regression, monotoniforhold, tangent, arealer.</p>
Omfang	16 timer
Særlige fokus-punkter	Skriftlighed, hjælpemiddelkompetencen (læs: TI Nspire), symbolhåndteringskompetence (hvordan klarer man sig <i>uden</i> TI Nspire).
Væsentligste arbejdsformer	Opgaverregning og -gennemgang i klassen/anvendelse af TI Nspire

[Retur til forside](#)

[Retur til forside](#)

Titel 2	Vækst og vækstmodeller
Indhold	<i>Kernestof:</i> Lineær, eksponentiel og potensvækst Grundbogen side 41-43, 110-114, 126-129, 134-135, 138.
Omfang	12 timer
Særlige fokuspunkter	Modelleringskompetence
Væsentligste arbejdsfor- mer	Opgaveregning i klassen/ regression med TI Nspire/skriftligt hjemme- arbejde

[Retur til forside](#)

[Retur til forside](#)

Titel 3	Trekantsberegning
Indhold	<p><i>Kernestof:</i> Ligedannede trekanter, retvinklede trekanter Grundbogen side 52, 56-58, 60-67.</p> <p>Cosinus og sinus, trigonometriske overgangsformler Grundbogen side 82-83</p> <p>Cosinusrelationen, appelsinformlen og sinusrelationerne Grundbogen side 84-89</p>
Omfang	12 timer
Særlige fokuspunkter	<p>Mundtlig fremstilling</p> <p>Ræsonnement og bevisførelse</p>
Væsentligste arbejdsformer	Opgaveregning i klassen/bevisgennemgang ved lærer og elever/skriftligt arbejde

[Retur til forside](#)

[Retur til forside](#)

Titel 4	2. gradspolynomier, parabler og 2. gradsligninger
Indhold	<i>Kernestof:</i> Parabler, 2. gradsligningen, toppunktsformlen. Grundbogen side 172-174, 176-177.
Omfang	12 timer
Særlige fokus-punkter	Symbol- og formalismekompetence (bogstavregning integreret del af forløbet) Tankegangskompetence (vi nåede frem til løsningsformlen for 2. gradsligningen og toppunktsformlen for parablen ved induktion, hvorefter vi beviste formlerne) Repræsentationskompetence, dvs. kompetence til at kunne skifte mellem forskellige repræsentationer. Fx den grafiske repræsentation (parablen/skæring med x-aksen) og den algebraiske repræsentation (2.grads ligningen) . Mundtlig fremstilling
Væsentligste arbejdsformer	Klasserumsdialog/opgaveregning i klassen/ bevisgennemgang ved lærer og elever/skriftligt hjemmearbejde

[Retur til forside](#)

[Retur til forside](#)

Titel 5	Differentiabilitet og tangent
Indhold	<p><i>Kernestof:</i> TRIP's matematiske bog 2 side 46-49, 52-61, 72-75, 100-109</p> <p><i>Supplerende stof:</i> TRIP's matematiske bog 2 side 111-113</p>
Omfang	18 timer
Særlige fokus-punkter	<p>Geometrisk forståelse af definitionen af differentialkvotient</p> <p>Mekanisk færdighedsregning med afledede funktioner af elementære funktioner</p> <p>Ræsonnement og bevisførelse</p> <p>Mundtlig fremstilling</p>
Væsentligste arbejdsformer	<p>Eksperimentel tilgang til de afledede funktioner for de elementære funktioner vha. TI Nspire/klasserumsdialog/opgaveregning i klassen/bevisgennemgang ved lærer og elever/skriftligt arbejde</p>

[Retur til forside](#)

[Retur til forside](#)

Titel 6	Middelværdisætningen og monotoniforhold
Indhold	<p><i>Kernestof:</i> TRIP's matematiske bog 2 side 64-71, 88-91</p> <p><i>Supplerende stof:</i> TRIP's matematiske bog 2 122-129, undtagen beviset for middelværdisætningen</p>
Omfang	6 timer
Særlige fokuspunkter	<p>Ræsonnement og bevisførelse</p> <p>Mundtlig fremstilling</p>
Væsentligste arbejdsformer	Klasserumsdialog/bevisgennemgang ved lærer og elever/opgaveregning i klassen/TI Nspire-understøttet skriftligt arbejde

[Retur til forside](#)

[Retur til forside](#)

Titel 7	Stamfunktioner, bestemte integraler og areal
Indhold	<i>Kernestof:</i> TRIP's matematiske bog 2 side 130-145, 148-151
Omfang	8 timer
Særlige fokus-punkter	Praktisk regnearbejde var hovedfokus Arealfunktionen som stamfunktion
Væsentligste arbejdsformer	Klasserumsdialog/opgaveregning i klassen/TI Nspire-understøttet skriftligt arbejde

[Retur til forside](#)

[Retur til forside](#)

Titel 8	Statistik og sandsynlighedsregning
Indhold	<p><i>Kernestof:</i> TRIP's matematiske bog 2 side 173-175,</p> <p><i>Supplerende stof:</i> Kombinatorik, binomialfordelingen og den hypergeometriske fordeling EMA 11 Sandsynlighedsregning (noter)</p>
Omfang	12 timer
Særlige fokus-punkter	<p>Anvendelse af mindst 2 typer sandsynlighedsteoretiske modeller</p> <p>Induktivt forløb frem til binomialfordelingen</p>
Væsentligste arbejdsformer	Klasserumsdialog/anvendelse af TI Nspire/opgaveregning

[Retur til forside](#)

[Retur til forside](#)

Titel 9	Logaritme- og eksponentialfunktioner
Indhold	<p><i>Kernestof:</i> TRIP's matematiske grundbog side 116, 120, TRIP's matematiske bog 2 side 152-157, 161 EMa 11 Supplement til logaritme- og eksponentialfunktioner (noter)</p>
Omfang	12 timer
Særlige fokuspunkter	Den naturlige logaritme som arealfunktion og regnereglerne for den naturlige logaritmefunktion
Væsentligste arbejdsformer	Bevisgennemgang ved lærer

[Retur til forside](#)

[Retur til forside](#)

Titel 10	Den mundtlige dimension af faget
Indhold	Det afsluttende forløb, hvor vi med udgangspunkt i eksamensspørgsmålene til mundtlig eksamen trænede mundtlig fremstilling.
Omfang	12 timer
Særlige fokuspunkter	Mundtlighed
Væsentligste arbejdsformer	Elevfremlæggelser

[Retur til forside](#)

Termin	december 2011
Institution	Marie Kruses Skole
Uddannelse	Stx
Fag og niveau	Matematik B
Lærer	Jørgen Ebbesen
Hold	EMa 11

EKSAMENSSPØRGSMÅL

1. MATEMATISKE MODELLER OG REGRESSION

Du skal redegøre for, hvorledes man afgør, om et talmateriale med tilnærmelse kan beskrives vha. af en lineær funktion $f(x) = ax + b$, en eksponentiel udvikling $f(x) = b \cdot a^x$ eller en potensudvikling $f(x) = b \cdot x^a$. Du skal endvidere redegøre for, hvordan man finder a og b ud fra to kendte punkter på grafen *uden* brug af regression på grafregneren.

2. ANDENGRADSPOLYNOMIER

Du skal bevise løsningsformlen for 2. grads ligningen.

3. ANDENGRADSPOLYNOMIER

Du skal bevise toppunktsformlen for en parabel.

4. TREKANTER

Du skal bevise formelen for cosinus, sinus og tangens til en vinkel i en retvinklet trekant. Desuden skal du redegøre for sammenhængen mellem en linjes hældning og vinklen med x -aksen.

5. TREKANTER

Du skal bevise appelsinformlen og sinusrelationerne.

6. TREKANTER

Du skal bevise cosinusrelationerne.

7. DIFFERENTIALREGNING

Gør rede for definitionen af $f'(x)$. Find $f'(x)$ for mindst 2 af funktionerne $f(x) = ax + b$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{x}$ og $f(x) = \sqrt{x}$.

8. DIFFERENTIALREGNING

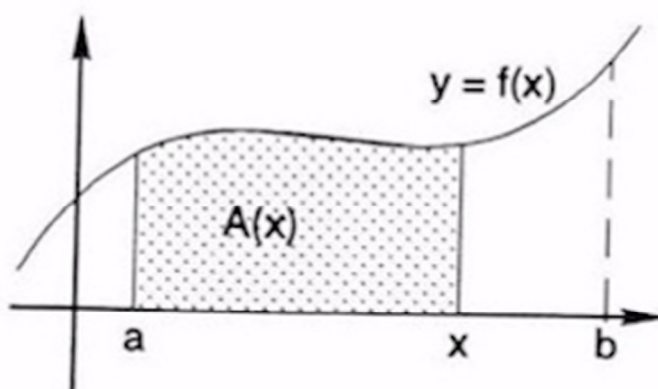
Gør rede for definitionen af $f'(x)$. Bevis udvalgte regneregler for differentiation, herunder tandlægereglen (produktreglen!).

9. MONOTONIFORHOLD

Du redegøre for indholdet af middelværdisætningen (sætningen skal *ikke* bevises) og belyse sammenhængen mellem fortegnet for den afledede funktion f' og monotoniforholdene for f .

10. AREALER OG STAMFUNKTIONER

Du skal vise, at arealfunktionen $A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, jf. figuren nedenfor.



11. LOGARIME- OG EKSPONENTIALFUNKTIONER

Du skal indføre den naturlige logaritmefunktion. Du skal bevise regneregler for den naturlige logaritme, herunder

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

12. LOGARITME- OG EKSPONENTIALFUNKTIONER

Du skal udlede formlerne for a og b i potensudviklingen

$$f(x) = b \cdot x^a$$

udtrykt vha. koordinatsættene for to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) på grafen for f .

Du skal udlede formlen for fordoblingskonstanten for en eksponentielt voksende funktion

$$f(x) = b \cdot a^x$$

13. STATISTIK OG SANDSYNLIGHEDSREGNING

Du skal gøre rede for binomialfordelingen, dvs. gøre rede for modellen og den tilhørende sandsynlighedsfordeling. Inddrag kombinatorik i det fornødne omfang.

Hvad enhver EMa 11 elev bør vide om sandsynlighedsregning

I hverdagssproget kan man tale om sandsynligheden for, at en eller anden begivenhed indtræffer. Tit er der hæftet en procent på sandsynligheden. Nogle gange er det, der bliver sagt det rene skære vrøvl, men hvis vi ser bort fra det mest eklatante sludder, dækker ekspressionen over

- på den ene side en usikkerhed om, hvor vidt begivenheden indtræffer eller ej
- på den anden side en forventning om, at i fx 9 ud af 10 tilfælde vil begivenheden indtræffe (så siger vi at sandsynligheden er 90 %)

Vores forventning kan være *empirisk* begrundet. Vi har været i præcis den samme situation mange gange før og erfaret, at i 90 % af tilfældene indtraf begivenheden, som vi er interesseret i.

Forventningen kan imidlertid også bunde i en *teoretisk* overvejelse, hvor vi har gjort op med os selv

- hvilke grundlæggende muligheder der er, når vi tæller alle muligheder med
- suppleret med en antagelse om, hvor sandsynlige de enkelte muligheder er

Spændende eksempler

Vi kunne være interesserede i at udtale os om sandsynligheden for at trække en hjerter/en konge/klør es osv. når vi trak et enkelt kort fra bunken. Det kunne være det hjerterkort som gav os en flush, den konge, som gav os fuldt hus, det klør es som gav os en royal straight flush.

Der kunne være mange tusinde kroner på højkant, ludomaner kunne havne i det våde element med en cementklods om fødderne.

Vi kunne også se på sandsynligheden for at vinde i Lotto. Rigtigt mange mennesker ser en Lottokupon som løsningen på deres økonomiske problemer. De små tal, vi får, når vi regner sandsynlighederne ud, generer dem ikke, for som de siger: en eller anden skal jo vinde, så det kan lige så godt være mig. En tilsvarende argumentation støder man på, når undersøgelser viser at rygning eller anden risikoadfærd forøger risikoen for at dø ung, pådrage sig alvorlige sygdomme, nedkalde mumiens forbandelse, whatever: det behøver jo ikke være mig.

Spændende, men lidt for kompliceret at tage stilling til nu og her, så vi tager i stedet for et

Dødsygt – men lærerigt eksempel

Vi ser på grundeksperimentet, som består i at trække et enkelt kort ud af et almindeligt spil kort uden jokere. Gab, hvor er det kedeligt! Men til gengæld er det let at lave en matematisk model, som siden kan udbygges til mere spændende tilfælde.

Der er 52 grundlæggende muligheder, i sandsynlighedsregning kaldes disse *udfald*. Klør 7 er et udfald, ruder konge er et udfald osv. Den udtømmende liste af alle muligheder kaldes *udfaldsrummet* og betegnes tit *U*. I dette tilfælde består udfaldsrummet af 52 forskellige kort. Hvis ikke kortene er

mærkede, vil vi intuitivt gå ud fra, at det er lige sandsynligt at trække spar 5 som ruder 3 som klør 4 osv. osv. Det korte af det lange er, at vi tildeler hvert af udfaldene sandsynligheden $\frac{1}{52}$ (knap 2%), for de er alle sammen lige sandsynlige, og de skal dele en samlet sandsynlighed på 100 %. Nu kan vi udtale os om sandsynligheden af forskellige *hændelser* fx at trække en hjerter/en konge (matematisk set er en hændelse en delmængde af udfaldsrummet).

Sandsynligheden for at trække et hjerterkort er $0,25 = 25 \%$, for der er jo 13 af slagsen og sandsynligheden for hvert af kortene er $\frac{1}{52}$, så den samlede sandsynlighed bliver (det er faktisk en definitionssag) $13 \cdot \frac{1}{52} = \frac{13}{52} = 0,25$.

Sandsynligheden for at trække en konge udregnes på tilsvarende måde. Der er 4 konger og sandsynligheden for hver af kongerne er $\frac{1}{52}$, så den samlede sandsynlighed bliver $4 \cdot \frac{1}{52} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Sådan kunne vi blive ved, men det er for kedeligt, så vi opsummerer:

For at kunne foretage matematiske beregninger af sandsynligheder, skal vi have et *udfaldsrum* U bestående af *udfald*. Hvert udfald tildeles en sandsynlighed. Disse sandsynligheder skal hver for sig ligge mellem 0 % og 100 %, og tilsammen skal de give 100 %. Sandsynligheden af en *hændelse* fås ved at lægge sandsynlighederne for de udfald, som hændelsen består af, sammen.

Hvis alle udfald i et udfaldsrum har den samme sandsynlighed, taler man om et *symmetrisk sandsynlighedsfelt*, og der er en særlig enkel måde at finde sandsynligheder på

$$\text{Sandsynligheden for hændelsen} = \frac{\text{antal gunstige}}{\text{antal mulige}}.$$

Model af udfaldsrummet ved 2 kast med terning

Resultatet i 1. kast er afbildet hen ad, resultatet i 2. kast ned ad.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3				(4,3)		
4						
5						
6		(2,6)				

Der er 36 udfald i alt. Vi har illustreret to af dem. I det ene viser terningen 2 i første kast og 6 i andet. I det andet viser terningen 4 i første kast og 3 i andet. Alle udfald er lige sandsynlige, så da sandsynlighederne lagt sammen skal give $1 = 100\%$, må hvert udfald have sandsynligheden $\frac{1}{36}$.

Opgave 1

a) Illustrér de udfald, hvor terningen viser 6 i første kast på figuren til højre.

Hvor stor er sandsynligheden for, at terningen viser 6 i første kast?

Er resultatet overraskende?

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

b) Illustrér de udfald, hvor terningen viser 6 i andet kast på figuren til højre.

Hvor stor er sandsynligheden for, at terningen viser 6 i andet kast?

Er resultatet overraskende?

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

c) Illustrér de udfald, hvor terningen viser 6 i både første og andet kast på figuren til højre.

Hvor stor er sandsynligheden for, at terningen viser 6 i både første og andet kast?

Hvad er sandsynligheden for, at terningen ikke viser 6 i nogen af kastene?

Hvad er sandsynligheden for, at terningen viser 6 i præcis ét af forsøgene?

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Opgave 2

Illustrér de udfald, hvor terningen viser mere i første end i andet kast på figuren til højre.

Hvor stor er sandsynligheden for, at terningen viser mere i første end i andet kast?

Hvad er sandsynligheden for, at terningen viser det samme i de to kast?

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Vi vil senere udlede en formel for **binomialfordelingen**. Binomialfordelingen beskriver sandsynligheden for at opnå et bestemt antal succeser, når man gentager et eksperiment, hvor sandsynligheden for at få succes i den ene gentagelse er uafhængig af resultatet i de andre gentagelser.

Eksempel Vi så før på 2 kast med en terning. Sandsynligheden for at få en sekser er den samme, nemlig $\frac{1}{6}$, hver gang vi kaster. Hvis vi kaster 2 gange med terningen, kan vi få 0, 1 eller 2 seksere. Sandsynligheden $p(t)$ for at få t seksere kan udregnes til

t	0	1	2
$p(t)$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$	$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Du kan jo sammenligne resultaterne i tabellen med dine resultater i opgave 1.

For at klare de lidt mere komplicerede, men spændende sandsynlighedsteoretiske spørgsmål er man nødt til at være god til at tælle antal muligheder. Disciplinen hedder **kombinatorik**, og vi lægger ud med endnu et par dødsyge eksempler.

Opgave 3 I en urne ligger 3 røde, 4 grønne og 5 blå kugler. Vi udtrækker på tilfældigvis 2 kugler.

- Hvor mange måder kan man gøre det på? Det rigtige svar er 66, men hvorfor?
- Hvor stor er sandsynligheden for, at begge kugler er røde?
- Hvor stor er sandsynligheden for, at ingen af kuglerne er rød?
- Hvor stor er sandsynligheden for, at de to kugler har forskellig farve?

Opgave 4 I en urne ligger 3 røde, 4 grønne og 5 blå kugler. Vi udtrækker på tilfældigvis 3 kugler.

- Hvor mange måder kan man gøre det på? Det rigtige svar er 220 (regn hellere efter), men hvorfor?
- Hvor stor er sandsynligheden for, at alle 3 kugler er røde?
- Hvor stor er sandsynligheden for, at ingen af kuglerne er rød?
- Hvor stor er sandsynligheden for, at de tre kugler har forskellig farve?

Kombinationer og permutationer

I VM i landevejscykling 2011, som køres i Rudersdal i skrivende stund, var der 210 deltagere til start. I virkeligheden er der et stærkt begrænset antal muligheder for, hvordan podiet kan se ud ved målet på Geels bakke, men man kunne spørge sig selv, hvor mange forskellige opstillinger man kunne forestille sig på sejrsskamlen dannet ud fra de 210 ryttere. Det er let at regne ud:

Der er 210 potentielle vindere. Når vi har lagt os fast på vinderen, er der 209 muligheder for sølvvinderen, og når guld- og sølvmedaljen er placeret, er der 208 mulige bronzevindere tilbage at vælge imellem. Man kan derfor sammensætte i alt

$210 \cdot 209 \cdot 208 = 9.129.120$ forskellige podier.

I eksemplet er der en verden til forskel på at blive valgt først og sidst, for vi startede med at vælge vinderen, som får lov til at køre i regnbuetrøjen hele næste år, det er der sponsorpenge i. Anden og

tredjepladsen er ærefulde, men det er altså ikke det samme som at vinde. Så vi var naturligt interesserede i rækkefølger. Som vi så er *antal rækkefølger er lette at tælle*.

I andre sammenhænge er vi ligeglade med rækkefølgen. Tag fx spillet Lotto: hvis man sidder med en Lottorække med 7 vindertal, kan man være ligeglad med, hvilken rækkefølge, man har sat krydserne i. For at beregne sandsynligheden for at vinde i Lotto har man brug for at bestemme, hvor mange forskellige Lottorækker, man kan udfylde. Hvis vi gør som før, er der 36 muligheder for at sætte det første kryds, 35 for det andet osv. Det giver

$$36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 = 42.072.307.200 \text{ forskellige måder at udfylde Lottorækken på.}$$

Men vi kan ende med de samme syv tal på mange måder, nemlig ved at vælge tallene i forskellige rækkefølger. Antallet af forskellige rækkefølger af de samme 7 tal, kan regnes ud præcis som før. Det første tal kan vælges på 7 måder, den andet på 6 osv. Det giver

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040 \text{ forskellige rækkefølger af de samme 7 tal.}$$

I vores optælling fra før talte vi altså hver Lottorække med 5.040 gange, så antallet af Lottorækker er

$$\frac{42.072.307.200}{5.040} = \mathbf{8.347.680 \text{ forskellige Lottorækker.}}$$

Det skal ikke være nogen hemmelighed, at vi kun har brugt podierne og Lottorækkerne som eksempler, som vi vil generalisere. Vi skriver derfor lige mellemregningerne fra Lottoeksemplet op. Der var

$$\frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Hvis vi erstatter tælleren i brøken med 36! Får vi de naturlige tal fra 29 og nedefter med i købet. Det kan vi kompensere for ved at dividere med 29!

Så antallet af forskellige Lottorækker kan skrives som

$$\frac{36!}{7! \cdot 29!}$$

Resultatet bliver selvfølgelig stadig 8.347.680, men vi har nu mellemregningen stående på en form, som gør det let at finde den generelle formel.

Definition En r -permutation af en n -mængde er en ordnet delmængde bestående af r elementer fra n -mængden. Antallet af sådanne kaldes $P(n, r)$.

Sætning

$$P(n, r) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Bevis

Vi skal vælge en ordnet delmængde (uden for matematikernes lukkede kredse kalder man det bare en rækkefølge) bestående af r elementer.

På 1. pladsen er der n valgmuligheder

For hver af disse er der $n - 1$ valgmuligheder for 2. pladsen. Det giver $n \cdot (n - 1)$ valgmuligheder, når vi skal besætte de 2 første pladser.

For hver af disse er der $n - 2$ valgmuligheder for 3. pladsen. Det giver $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$ valgmuligheder, når vi skal besætte de 3 første pladser.

For hver af disse er der $n - 3$ valgmuligheder for 4. pladsen. Det giver $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)$ valgmuligheder, når vi skal besætte de 4 første pladser.

Og sådan kan man blive ved. Læg mærke til, at tallet der trækkes fra i den sidste parentes i den sidste parentes, er 1 mindre end pladsnummeret. Når vi kommer til r . pladsen, skal vi altså trække $r - 1$ fra.

Det giver $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (r - 1)) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - r + 1)$ valgmuligheder. Hvis vi skriver $n!$ får vi tallene fra $n - r$ og nedefter ekstra, men dem kan vi fjerne ved at dividere med $r!$ Altså har vi bevist, at

$$P(n, r) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Definition En r -kombination af en n -mængde er en delmængde bestående af r elementer fra n -mængden. Antallet af sådanne kaldes $K(n, r)$.

Sætning

$$K(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

Bevis

Det er antallet $K(n, r)$ af r -delmængder, vi skal finde. Vi kender antallet $P(n, r)$ af ordnede r -delmængder.

Tricket består i, at vi lader, som om vi finder de ordnede delmængder ved først at vælge delmængderne ud og bagefter ordne dem. Det er *ikke* det, vi gør i praksis, for der vælger vi rækkefølgerne direkte. Men vi kunne gøre det i princippet.

Altså starter vi med at vælge en r -delmængde ud. Det kan gøres på $K(n, r)$ måder. Bagefter ordner vi den udvalgte mængde, det kan gøres på $r!$ måder (der er r muligheder på 1. pladsen, $r - 1$ muligheder på 2. pladsen osv. Vi kunne også bare sige, at det kan gøres på $P(r, r) = r!$ måder under henvisning til foregående sætning). Det samlede antal ordnede r -delmængder $P(n, r)$ fås ved at gange de to tal sammen:

$$P(n, r) = K(n, r) \cdot r! \Leftrightarrow K(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} \Leftrightarrow K(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Når tallene er små som i opgave 1 og 2, kan man regne $K(n, r)$ ud med håndkraft. Ellers kan man taste $nCr(n, r)$ i et grafregneværksted i TI Nspire.

Opgave 5 Indtastning af $nCr(6,3)$ i TI Nspire giver resultatet 20.

- Regn efter i hånden.
- Formuler $K(6,3) = 20$ i hverdagssprog.

Gevinstchancen i Lotto

Vi beregnede gevinstchancen vha. TI Nspire. Det er god matematisk stil at oversætte TI Nspire-kommandoerne og resultaterne til almindelig matematisk sprog. Vi forsynder os lidt mod denne gyldne regel, for at teksten ikke skal blive for omstændelig.

Når man udfylder en Lottorække, vælger man 7 tal ud af 36 mulige. Det kan gøres på

$nCr(36,7) \blacktriangleright 8347680$ forskellige måder.

Ved lodtrækningen udtrækkes 7 vindertal og 1 tillægstal.

1. præmie opnås ved, at man har afkrydset de 7 vindertal. Det kan kun gøres på 1 måde, så

sandsynligheden for at få 1. præmie er $\frac{1}{8347680} \blacktriangleright 1.19794E-7$

2. præmie opnås ved, at man har afkrydset 6 af de 7 vindertal og tillægstallet. Vindertallene kan vælges på $nCr(7,6) \blacktriangleright 7$ måder. At resultatet giver 7, er ikke overraskende, for at man har 6 vindertal, er det samme som, at man mangler 1, og der er 7 forskellige tal, som man kan mangle.

Sandsynligheden for at få 2. præmie er $\frac{7}{8347680} \blacktriangleright 8.38556E-7$

3. præmie opnås ved, at man har afkrydset 6 af de 7 vindertal. Men altså ikke tillægstallet. Vindertallene kan vælges på 7 måder lige som før. Ved 2. præmien skulle det sidste tal være tillægstallet, så der var ikke flere valgmuligheder. Denne gang skal vi vælge 1 af de 28 tal, som hverken er vindertal eller tillægstal. I alt er der $7 \cdot 28 \blacktriangleright 196$ rækker, der giver 3. præmie.

Sandsynligheden for at få 3. præmie er derfor $\frac{196}{8347680} \blacktriangleright 0.000023$

4. præmie opnås ved, at man har afkrydset 5 af de 7 vindertal. Og altså 2 tal ud af de 29 tal, der ikke er vindertal. Vindertallene kan vælges på $nCr(7,5) \blacktriangleright 21$ måder. De 2 tal, som ikke er vindertal, kan vælges på $nCr(29,2) \blacktriangleright 406$ måder. I alt er der $21 \cdot 406 \blacktriangleright 8526$ rækker, der giver 4. præmie.

Sandsynligheden for at få 4. præmie er derfor $\frac{8526}{8347680} \blacktriangleright 0.001021$

5. præmie opnås ved, at man har afkrydset 4 af de 7 vindertal. Og altså 3 tal ud af de 29 tal, der ikke er vindertal. Vindertallene kan vælges på $nCr(7,4) \triangleright 35$ måder. De 3 tal, som ikke er vindertal, kan vælges på $nCr(29,3) \triangleright 3654$ måder. I alt er der $35 \cdot 3654 \triangleright 127890$ rækker, der giver 5. præmie.

Sandsynligheden for at få 5. præmie er derfor $\frac{127890}{8347680} \triangleright 0.01532$

På politiken.dk kunne man 9/11 2011 læse

Sådan er dine chancer for at blive multimillionær i aften



Dobbelt så mange mennesker som normalt spiller lotto i dag.

18.00 er sidste chance, og 20.30 får vi vinderen.
AF [Tatiana Tilly](#)

I aften kan du vinde 86 millioner kroner i lotto.

Men du er ikke den eneste. Danske Spil forventer, at mere end en million danskere vil spille i dag.

»Der er jo sådan, at lotto ikke er matematik, men psykologi, så tanken om, at man komme i nærheden af sådan en stor gevinst, får mange flere til at spille«, siger Thomas Rørsig, der er informationschef ved Danske Spil.

LÆS OGSÅ [Nu kan du snart blive multimillionær](#)

Dagens gevinst kan blive den største i danmarkshistorien nogensinde. Den nuværende rekord er på 38,5 millioner, som blev vundet af en familie i København i 2008.

VINDERCHANCER

Sandsynlighed for at vinde med en række i Onsdagslotto (dvs. 6 rigtige tal trukket fra 1 til 48) er:

$(6! \times 42!)$ divideret med $48!$ d.v.s. 0,00000008148955 hvilket er: 1 ud af 12.271.512

Sandsynligheden for at vinde i Onsdagslotto + Superpulje er:

$P(\text{rigtig lottokombination og rigtig superpuljetal})$

$= P(\text{rigtig lottokombination}) \times P(\text{rigtig superpuljetal givet en rigtig lottokombination})$

$= (1 \text{ ud af } 12.271.512) \times P(\text{Et tilfældig tal mellem 1 og 48, rammer et af 6 succesfulde tal})$

$= (1 \text{ ud af } 12.271.512) \times (6 \text{ ud af } 48)$

$= (1 \text{ ud af } 12.271.512) \times (1 \text{ ud af } 8)$

$= (1 \text{ ud af } 98.172.096)$

Udregning: Danske Spil

1 ud af 98 millioner

Puljen nærmer sig de 100 millioner, fordi den ikke er blevet udløst siden uge 19.

For at vinde det store beløb skal man både ramme seks vindertal og supertallet.

Chancen for, at det sker, er 1 ud af 98 millioner, oplyser Thomas Rørsig. Trods de små chancer skal han også selv spille lotto i dag.

»Det virker jo på mig, som det virker på alle andre«, siger han optimistisk.

LÆS OGSÅ [Danske lottovindere fedter med millionerne](#)

Den hidtil største gevinst vundet i år er på 28.301.966 kroner. Resultatet af aftenens trækning offentliggøres kl. 20.30 og du kan spille frem til kl. 18.

Opgave 6

Tjek beregningen af gevinstchancen!

Opgave 7 (binomialfordelingen)

Vi ser på et basiseksperiment, hvor der er to udfald, succes, som forkortes s , og fiasko, som forkortes f . Sandsynligheden for succes er p . Da der kun er to muligheder, må sandsynligheden for fiasko være $1-p$, da de to sandsynligheder skal give 1 tilsammen.

2 gentagelser

Der er 4 udfald, når forsøget gentages 2 gange

(f, f) , (s, f) , (f, s) og (s, s) .

Bestem sandsynligheden for hvert af udfaldene. Udfyld nedenstående tabel

t	0	1	2
$p(t)$			

t er antal succeser, $p(t)$ er sandsynligheden for at få netop t succeser.

3 gentagelser

Der er $2^3 = 8$ udfald, når forsøget gentages 3 gange

(f, f, f) ,

$(s, f, f), (f, s, f), (f, f, s),$

$(s, s, f), (s, f, s), (f, s, s)$

$(s, s, s).$

Bestem sandsynligheden for hvert af udfaldene. Udfyld nedenstående tabel

t	0	1	2	3
$p(t)$				

t er antal succeser, $p(t)$ er sandsynligheden for at få netop t succeser.

4 gentagelser

Der er $2^4 = 16$ udfald, når forsøget gentages 4 gange

$(f, f, f, f),$

$(s, f, f, f), (f, s, f, f), (f, f, s, f), (f, f, f, s),$

$(s, s, f, f), (s, f, s, f), (s, f, f, s),$

$(f, s, s, f), (f, s, f, s)$

(f, f, s, s)

$(s, s, s, f), (s, s, f, s), (s, f, s, s), (f, s, s, s)$

(s, s, s, s)

Bestem sandsynligheden for hvert af udfaldene. Udfyld nedenstående tabel

t	0	1	2	3	4
$p(t)$					

t er antal succeser, $p(t)$ er sandsynligheden for at få netop t succeser

5 gentagelser

Der er $2^5 = 32$ udfald, når forsøget gentages 5 gange

(f, f, f, f, f) ,

(s, f, f, f, f) , (f, s, f, f, f) , (f, f, s, f, f) , (f, f, f, s, f) , (f, f, f, f, s)

(s, s, f, f, f) , (s, f, s, f, f) , (s, f, f, s, f) , (s, f, f, f, s) ,

(f, s, s, f, f) , (f, s, f, s, f) , (f, s, f, f, s)

(f, f, s, s, f) , (f, f, s, f, s) ,

(f, f, f, s, s)

(s, s, s, f, f) , (s, s, f, s, f) , (s, f, s, s, f) , (f, s, s, s, f) ,

(s, s, f, f, s) , (s, f, s, f, s) , (f, s, s, f, s)

(s, f, f, s, s) , (f, s, f, s, s) ,

(f, f, s, s, s)

(s, s, s, s, f) , (s, s, s, f, s) , (s, s, f, s, s) , (s, f, s, s, s) , (f, s, s, s, s)

(s, s, s, s, s)

Bestem sandsynligheden for hvert af udfaldene. Udfyld nedenstående tabel

t	0	1	2	3	4	5
$p(t)$						

t er antal succeser, $p(t)$ er sandsynligheden for at få netop t succeser

Besvarelse af binomialfordelingsopgaven

Vi ser på et basiseksperiment, hvor der er to udfald, succes, som forkortes s , og fiasko, som forkortes f . Sandsynligheden for succes er p . Da der kun er to muligheder, må sandsynligheden for fiasko være $1-p$, da de to sandsynligheder skal give 1 tilsammen.

2 gentagelser

Der er 4 udfald, når forsøget gentages 2 gange

(f, f) , (s, f) , (f, s) og (s, s) .

Sandsynligheden for (f, f) er $(1 - p)^2$. Det giver os det første tal i tabellen nedenfor, da (f, f) er det eneste udfald med 0 succeser.

Begge udfaldene (s, f) og (f, s) har sandsynligheden $p \cdot (1 - p)$. Det er de to udfald, der svarer til 1 succes, så

$$p(1) = 2 \cdot p \cdot (1 - p).$$

Sandsynligheden for (s, s) er p^2 . Det giver os det sidste tal i tabellen nedenfor, da (s, s) er det eneste udfald med 2 succeser.

t	0	1	2
$p(t)$	$(1 - p)^2$.	$2 \cdot p \cdot (1 - p)$	p^2

t er antal succeser, $p(t)$ er sandsynligheden for at få netop t succeser.

3 gentagelser

Der er $2^3 = 8$ udfald, når forsøget gentages 3 gange

(f, f, f) ,

(s, f, f) , (f, s, f) , (f, f, s) ,

(s, s, f) , (s, f, s) , (f, s, s)

(s, s, s) .

Sandsynligheden for (f, f, f) er $(1 - p)^3$. Det giver os det første tal i tabellen nedenfor, da (f, f, f) er det eneste udfald med 0 succeser.

Alle udfaldene (s, f, f) , (f, s, f) og (f, f, s) har sandsynligheden $p \cdot (1 - p)^2$. Det er de tre udfald, der svarer til 1 succes, så

$$p(1) = 3 \cdot p \cdot (1 - p)^2.$$

Alle udfaldene (s, s, f) , (s, f, s) og (f, s, s) har sandsynligheden $p^2 \cdot (1 - p)$. Det er de tre udfald, der svarer til 2 succeser, så

$$p(2) = 3 \cdot p^2 \cdot (1 - p).$$

Sandsynligheden for (s, s, s) er p^3 . Det giver os det sidste tal i tabellen nedenfor, da (s, s, s) er det eneste udfald med 3 succeser.

t	0	1	2	3
$p(t)$	$(1 - p)^3$	$3 \cdot p \cdot (1 - p)^2$	$3 \cdot p^2 \cdot (1 - p)$.	p^3

t er antal succeser, $p(t)$ er sandsynligheden for at få netop t succeser.

4 gentagelser

Der er $2^4 = 16$ udfald, når forsøget gentages 4 gange

(f, f, f, f) ,

(s, f, f, f) , (f, s, f, f) , (f, f, s, f) , (f, f, f, s) ,

(s, s, f, f) , (s, f, s, f) , (s, f, f, s) ,

(f, s, s, f) , (f, s, f, s)

(f, f, s, s)

(s, s, s, f) , (s, s, f, s) , (s, f, s, s) (f, s, s, s)

(s, s, s, s)

Sandsynligheden for (f, f, f, f) er $(1 - p)^4$. Det giver os det første tal i tabellen nedenfor, da (f, f, f, f) er det eneste udfald med 0 succeser.

Alle udfaldene (s, f, f, f) , (f, s, f, f) , (f, f, s, f) og (f, f, f, s) har sandsynligheden $p \cdot (1 - p)^3$. Det er de fire udfald, der svarer til 1 succes, så

$$p(1) = 4 \cdot p \cdot (1 - p)^3.$$

Alle udfaldene (s, s, f, f) , (s, f, s, f) , (s, f, f, s) , (f, s, s, f) , (f, s, f, s) og (f, f, s, s) har sandsynligheden $p^2 \cdot (1 - p)^2$. Det er de seks udfald, der svarer til 2 succeser, så

$$p(2) = 6 \cdot p^2 \cdot (1 - p)^2.$$

Alle udfaldene (s, s, s, f) , (s, s, f, s) , (s, f, s, s) (f, s, s, s) har sandsynligheden $p^3 \cdot (1 - p)$. Det er de fire udfald, der svarer til 3 succeser, så

$$p(3) = 4 \cdot p^3 \cdot (1 - p).$$

Sandsynligheden for (s, s, s, s) er p^4 . Det giver os det sidste tal i tabellen nedenfor, da (s, s, s, s) er det eneste udfald med 4 succeser.

t	0	1	2	3	4
$p(t)$	$(1 - p)^4$	$4 \cdot p \cdot (1 - p)^3$	$6 \cdot p^2 \cdot (1 - p)^2$	$4 \cdot p^3 \cdot (1 - p)$	p^4

t er antal succeser, $p(t)$ er sandsynligheden for at få netop t succeser

5 gentagelser

Der er $2^5 = 32$ udfald, når forsøget gentages 5 gange

(f, f, f, f, f) ,

(s, f, f, f, f) , (f, s, f, f, f) , (f, f, s, f, f) , (f, f, f, s, f) , (f, f, f, f, s)

(s, s, f, f, f) , (s, f, s, f, f) , (s, f, f, s, f) , (s, f, f, f, s) ,
 (f, s, s, f, f) , (f, s, f, s, f) , (f, s, f, f, s)
 (f, f, s, s, f) , (f, f, s, f, s) ,
 (f, f, f, s, s)

(s, s, s, f, f) , (s, s, f, s, f) , (s, f, s, s, f) , (f, s, s, s, f) ,
 (s, s, f, f, s) , (s, f, s, f, s) , (f, s, s, f, s)
 (s, f, f, s, s) , (f, s, f, s, s) ,
 (f, f, s, s, s)

(s, s, s, s, f) , (s, s, s, f, s) , (s, s, f, s, s) , (s, f, s, s, s) , (f, s, s, s, s)

(s, s, s, s, s)

Sandsynligheden for (f, f, f, f, f) er $(1 - p)^5$. Det giver os det første tal i tabellen nedenfor, da (f, f, f, f, f) er det eneste udfald med 0 succeser.

Alle udfaldene (s, f, f, f, f) , (f, s, f, f, f) , (f, f, s, f, f) , (f, f, f, s, f) , (f, f, f, f, s) har sandsynligheden $p \cdot (1 - p)^4$. Det er de fem udfald, der svarer til 1 succes, så

$$p(1) = 5 \cdot p \cdot (1 - p)^4.$$

Alle udfaldene (s, s, f, f, f) , (s, f, s, f, f) , (s, f, f, s, f) , (s, f, f, f, s) , (f, s, s, f, f) , (f, s, f, s, f) , (f, s, f, f, s) , (f, f, s, s, f) , (f, f, s, f, s) og (f, f, f, s, s) har sandsynligheden $p^2 \cdot (1 - p)^3$. Det er de 10 udfald, der svarer til 2 succeser, så

$$p(2) = 10 \cdot p^2 \cdot (1 - p)^3.$$

Alle udfaldene (s, s, s, f, f) , (s, s, f, s, f) , (s, f, s, s, f) , (f, s, s, s, f) , (s, s, f, f, s) , (s, f, s, f, s) , (f, s, s, f, s) , (s, f, f, s, s) , (f, s, f, s, s) og (f, f, s, s, s) har sandsynligheden $p^3 \cdot (1 - p)^2$. Det er de 10 udfald, der svarer til 3 succeser, så

$$p(3) = 10 \cdot p^3 \cdot (1 - p)^2.$$

Alle udfaldene (s, s, s, s, f) , (s, s, s, f, s) , (s, s, f, s, s) , (s, f, s, s, s) , (f, s, s, s, s) har sandsynligheden $p^4 \cdot (1 - p)$. Det er de 5 udfald, der svarer til 4 succeser, så

$$p(4) = 5 \cdot p^4 \cdot (1 - p).$$

Sandsynligheden for (s, s, s, s, s) er $(1 - p)^5$. Det giver os det sidste tal i tabellen nedenfor, da (s, s, s, s, s) er det eneste udfald med 5 succeser.

t	0	1	2	3	4	5
$p(t)$	$(1-p)^5$	$5 \cdot p \cdot (1-p)^4$	$10 \cdot p^2 \cdot (1-p)^3$	$10 \cdot p^3 \cdot (1-p)^2$	$5 \cdot p^4 \cdot (1-p)$	p^5

t er antal succeser, $p(t)$ er sandsynligheden for at få netop t succeser.

Binomialfordelingen

Vi har nu bragt os selv i en position, hvor vi er i stand til at opstille en generel formel for sandsynligheden for at få

$0, 1, \dots, n$ succeser

når vi gentager et basiseksperiment, hvor der er præcis to udfald, succes og fiasko og sandsynligheden p for succes er den samme, hver gang vi gentager forsøget.

Sandsynligheden for at få præcis t succeser ud af de n gentagelser er

$$p(t) = K(n, t) \cdot p^t \cdot (1-p)^{n-t} = \frac{n!}{t!(n-t)!} \cdot p^t \cdot (1-p)^{n-t}$$

for $t = 0, 1, \dots, n$.

Bevis

Når vi gentager forsøget n gange får vi en stribe udfald, som er af formen

$$(s, f, f, s, \dots, s, f)$$

Det, du skal hæfte dig ved, er, at der står enten s eller f på alle pladser. Det konkrete eksempel er tilfældigt valgt. Og at der er lige så mange pladser, som der er gentagelser af forsøget, altså n pladser.

Når vi skal bestemme sandsynligheden $p(t)$ for at opnå præcis t succeser, er vi nødt til at tælle op, hvor mange forskellige måder vi kan opnå de t succeser på. Det kunne fx være, at vi sad i held i starten, og fik t succeser til at begynde med, men at heldet slap op, og vi fik fiasko resten af gangene.

$$\begin{matrix} t \text{ s'er} & n-t \text{ f'er} \\ (s, s, \dots, s, f, f, \dots, f) \end{matrix}$$

Men det kunne også være, at vi fik vores succeser afvekslende med fiaskoerne og alligevel nåede op på t succeser i sidste ende.

Spørgsmålet er altså i første omgang, hvor mange måder, man kan vælge de t pladser, som der skal være succes på, ud blandt de n pladser, der er at vælge imellem. Men det tal er jo præcis det, som vi kalder

$$K(n, t) = \frac{n!}{t!(n-t)!}$$

Nu kender vi antallet af udfald i hændelsen t succeser. Hvert af udfaldene (altså succes på t bestemte pladser) har sandsynligheden

$$p^t \cdot (1-p)^{n-t}$$

Så er det bare at gange de to tal sammen for at få $p(t)$:

$$p(t) = K(n, t) \cdot p^t \cdot (1-p)^{n-t}$$

Eller sagt på en anden måde:

$$p(t) = \frac{n!}{t!(n-t)!} \cdot p^t \cdot (1-p)^{n-t}$$

For at svare på c) og d) i opgave 8 nedenfor skal du bruge TI Nspire.

Hvis man vil finde sandsynligheden for præcis t succeser ved n gentagelser med sandsynligheden p for succes i den enkelte gentagelse, skriver man

$$\text{BinomPdf}(n, p, t)$$

Det behøvede man strengt taget ikke avanceret software til at regne ud, for sandsynligheden for præcis j succeser er som bekendt

$$p(t) = K(n, t) \cdot p^t \cdot (1-p)^{n-t} = \frac{n!}{t! \cdot (n-t)!} \cdot p^t \cdot (1-p)^{n-t}$$

Skal man derimod regne sandsynligheden for mindst t_1 og højst t_2 succeser ud, er TI Nspire uundværlig, man taster bare

$$\text{BinomCdf}(n, p, t_1, t_2)$$

Et par eksempler – skal ikke bruges direkte i opgaven, men sådan virker det altså.

<code>binomPdf(40,0.85,32)</code>	0.108665
<code>binomCdf(40,0.85,10,20)</code>	2.12791E-7

Man behøver ingen gang huske på kommandoerne, programmet åbner selv indtastningsvinduer, hvis man vælger sandsynlighedsregning og dernæst fordelinger i et **Beregninger**-værksted.

Opgave 8

På et lille gartneri dyrker man julekaktus. Der plantes 40 julekaktus, og af erfaring ved man, at 85% af alle planter når salgsstørrelse.

Beregn sandsynligheden for.

- a) ingen planter når salgsstørrelse
- b) alle planter når salgsstørrelse
- c) mindst halvdelen af planterne når salgsstørrelse.
- d) mindst 25 og højst 35 af planterne når salgsstørrelse

Vi har i forbindelse med binomialfordelingen set på gentagelsesforsøg, hvor sandsynligheden for at få succes ikke ændredes.

Men hvis man vælger ud fra en på forhånd fastlagt mængde succeser og fiaskoer, ændres oddsene hele tiden.

Eksempel

På pladen sidder der en stribe skrabelodder i midten. I lærerens barndom så Lillebror Lotteriet anderledes ud. Der sad sammenrullede lodsedler langs kanten. Når man åbnede rullen kunne man se, om man havde trukket et vinderlod eller en nitte.

Det foresvæver mig, at der var to gevinstlodder pr. plade.

Hvis to kunder før en selv havde vundet, skulle man være godt tosset for at investere sine lomme penge i et lod.



Eksempel

Verdens mest idiotiske spil: russisk roulette. Man putter én patron i tromlen på en revolver og snurrer tromlen rundt. Første deltager retter revolveren mod sin tinding og trykker. Hvis han/hun overlever, er det næste deltagers tur. Således fortsættes, ind til patronen er fundet. Hvis man ikke snurrer tromlen rundt mellem deltagerne, ændres oddsene for overlevelse til det værre, for hver deltager, der klarer frisag.

Spørgsmål c) og d) i opgave 2 er svære, men du kan jo lade dig inspirere af nedenstående.

Du støder hele tiden på problemstillingen, at du skal vælge j elementer ud af en mængde med n elementer, fx 2 fuskere ud af de 20 fuskere. Det kan gøres på

$$K(n, j) = \frac{n!}{j! \cdot (n - j)!}$$

måder. I eksemplet med de to fuskere får man

$$K(20,2) = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$$

måder at vælge de to fuskere på.

Man kan selvfølgelig også sætte TI Nspire til det. Kommandoen er

$nCr(20,2)$	190
-------------	-----

For at nå op på et fuldt udvalg på 7 personer, skal man supplere med 5 politikere, der ikke har fusket. Dem kan man vælge på

$$K(10,5) = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$$

(regnes nok lettes ud vha. TI Nspire: $nCr(10,5)$ giver 252).

Så der findes i alt $K(20,2) \cdot K(10,5) = 190 \cdot 252 = 47.880$ udvalg med 2 fuskere og 5 ikke-fuskere

Opgave 9

Blandt 30 politikere, hvoraf de 20 har fusket i valgkampen, skal vælges 7 til et udvalg.

Beregn:

- sandsynligheden for at der ikke kommer fuskere i udvalget,
- sandsynligheden for at udvalget kun består af fuskere.
- sandsynligheden for at der er mindst 3 og højst 5 fuskere i udvalget.
- sandsynligheden for at der er flertal af fuskere i udvalget.

Besvarelse af opgave 9

Blandt 30 politikere, hvoraf de 20 har fusket i valgkampen, skal vælges 7 til et udvalg.

Der findes i alt $nCr(30,7) \approx 2035800$ af den slags udvalg.

Man kunne spørge sig selv, hvor mange fuskere, man skal regne med, at der sidder i et sådant udvalg, hvis udvalgets sammensætning er tilfældigt. Vi tæller udvalg.

0 fuskere

Der er $nCr(10,7) \approx 120$ udvalg med 0 fuskere. Sandsynligheden for, at et tilfældigt sammensat udvalg består af en fuskere og 6 ikke-fuskere bliver derfor $\frac{120}{2035800} = 0.000059 \approx \mathbf{0,0059\%}$

1 fuskere

Hvis der skal være én fuskere i udvalget, kan vi vælge fuskere på 20 måder. Udvalget skal suppleres op til 7 medlemmer med 6 ikke-fuskere. Dem kan vi vælge på $nCr(10,6) \blacktriangleright 210$ måder.

Der er $20 \cdot nCr(10,6) \blacktriangleright 4200$ udvalg med 1 fuskere. Sandsynligheden for, at et tilfældigt sammensat udvalg består af én fuskere og 6 ikke-fuskere bliver derfor $\frac{4200}{2035800} = 0.002063 \cong \mathbf{0,3\%}$

2 fuskere

Hvis der skal være 2 fuskere i udvalget, kan vi vælge de 2 fuskere på $nCr(20,2) \blacktriangleright 190$ måder.

Udvalget skal suppleres op til 7 medlemmer med 5 ikke-fuskere. Dem kan vi vælge på $nCr(10,5) \blacktriangleright 252$ måder.

Der er $nCr(20,2) \cdot nCr(10,5) \blacktriangleright 47880$ udvalg med 2 fuskere. Sandsynligheden for, at et tilfældigt sammensat udvalg består af 2 fuskere og 5 ikke-fuskere bliver derfor $\frac{47880}{2035800} = 0.023519 \approx \mathbf{2,3\%}$

Hvis der skal være 3 fuskere i udvalget, kan vi vælge de 3 fuskere på $nCr(20,3)$ måder. Udvalget skal suppleres op til 7 medlemmer med 4 ikke-fuskere. Dem kan vi vælge på $nCr(10,4)$ måder.

Der er $nCr(20,3) \cdot nCr(10,4) \blacktriangleright 239400$ udvalg med 3 fuskere. Sandsynligheden for, at et tilfældigt sammensat udvalg består af 3 fuskere og 4 ikke-fuskere bliver derfor $\frac{239400}{2035800} = 0.117595 \cong \mathbf{11,8\%}$

Aner vi et system? Det gør vi vist nok.

4 fuskere

Der er $nCr(20,4) \cdot nCr(10,3) \blacktriangleright 581400$ udvalg med 4 fuskere. Sandsynligheden for, at et tilfældigt sammensat udvalg består af 4 fuskere og 3 ikke-fuskere bliver derfor $\frac{581400}{2035800} = 0.285588 \cong \mathbf{28,6\%}$

5 fuskere

Der er $nCr(20,5) \cdot nCr(10,2) \blacktriangleright 697680$ udvalg med 5 fuskere. Sandsynligheden for, at et tilfældigt sammensat udvalg består af 5 fuskere og 2 ikke-fuskere bliver derfor $\frac{697680}{2035800} = 0.342706 \cong \mathbf{34,3\%}$

6 fuskere

Der er $nCr(20,6) \cdot nCr(10,1) \blacktriangleright 387600$ udvalg med 6 fuskere. Sandsynligheden for, at et tilfældigt sammensat udvalg består af 6 fuskere og én ikke-fuskere bliver derfor $\frac{387600}{2035800} = 0.190392 \cong \mathbf{19\%}$

7 fuskere

Der er $nCr(20,7) \cdot nCr(10,0) \blacktriangleright 77520$ udvalg med 7 fuskere. Sandsynligheden for, at et tilfældigt sammensat udvalg består af 7 fuskere bliver derfor $\frac{77520}{2035800} = 0.038078 \cong \mathbf{3,8\%}$

Det overlades til læseren at gøre besvarelsen af opgave 9 færdig. Vi havde jo skumle bagtanker med opgaven. Vi talte fuskere – dem var der 20 at tage af, og vi nedsatte tilfældige udvalg på 7 medlemmer.

Vi så, at

t	0	1	2	3
p(t)	$\frac{K(20,0) \cdot K(10,7)}{K(20,7)}$	$\frac{K(20,1) \cdot K(10,6)}{K(20,7)}$	$\frac{K(20,2) \cdot K(10,5)}{K(20,7)}$	$\frac{K(20,3) \cdot K(10,4)}{K(20,7)}$

t	4	5	6	7
p(t)	$\frac{K(20,4) \cdot K(10,3)}{K(20,7)}$	$\frac{K(20,5) \cdot K(10,2)}{K(20,7)}$	$\frac{K(20,6) \cdot K(10,1)}{K(20,7)}$	$\frac{K(20,7) \cdot K(10,1)}{K(20,7)}$

Den hypergeometriske fordeling

Vi har nu bragt os selv i en position, hvor vi er i stand til at opstille en generel formel for sandsynligheden for at få

$0, 1, \dots, n$ succeser

når vi vælger en tilfældig stikprøve på n elementer ud fra N elementer, hvor vi opfatter m elementer som succeser og de resterende $N-m$ elementer som fiaskoer.

Sandsynligheden for at få præcis t succeser er

$$p(t) = \frac{K(m, t) \cdot K(N - m, n - t)}{K(N, n)}$$

for $t = 0, 1, \dots, n$.

Bevis Vi skulle vælge en stikprøve på n elementer ud fra N elementer. Det kan gøres på $K(N, n)$ måder. Det gav os det samlede antal stikprøver, som er nævneren i brøken. Tælleren er ikke meget sværere: de t succeser skal vælges ud af m succeser. Det kan gøres på $K(m, t)$ måder. Men hvis stikprøven indeholder t succeser, skal den indeholde $n-t$ fiaskoer, som skal vælges ud af $N-m$ fiaskoer. Det kan gøres på $K(N - m, n - t)$ måder. Der er derfor $K(m, t) \cdot K(N - m, n - t)$ stikprøver med præcis t succeser, og det er netop det tal, der står i tælleren.

Supplement til logaritme- og eksponentialfunktioner

Vi anfører uden bevis

Sætning

Hvis funktionen f er differentiabel i, og k er en konstant, så er funktionen $f_k(x) = f(kx)$ differentiabel og

$$(f(kx))' = k \cdot f'(kx).$$

Eksempel Man kan vise, at $f(x) = e^x$ er differentiabel med den bemærkelsesværdige egenskab, at $f'(x) = e^x$. Hvis vi benytter sætningen fra før på funktionen

$$e^{kx}$$

får vi

$$(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$$

Denne regel skal man kunne udenad til delprøven uden hjælpemidler til skriftlig studenter-eksamen.

Nu vender vi bøtten og lader, som om vi ikke ved noget om funktionen e^x .

Definition

Vi definerer den naturlige logaritmefunktion **ln** ved

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0.$$

Du skal illustrere den geometriske betydning af definitionen på en figur til højre. (Arealet under grafen for $f(t) = \frac{1}{t}$ fra 1 til x).

Definitionen er lidt af en mundfuld. Der findes ikke en pæn algebraisk måde at beskrive, hvad den naturlige logaritme gør ved x , på. Altså ikke noget med fx x^3 eller $\sqrt{x-7}$ eller noget andet simpelt regneudtryk.

Men for $x > 1$ går definitionen af $\ln(x)$ ud på, at $\ln(x)$ er en arealfunktion $A(x)$ af den type, vi indførte, da vi arbejdede med differentialregning. Dengang så vi, at $A(x)$ var en stamfunktion til den funktion, som A målte arealet under grafen for. I dette tilfælde betyder sætningen fra den gang, at

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Det følger også direkte af definitionen, at

$$\ln(1) = 0$$

og det er i sig selv vigtigt at huske, men eftersom det er arealet af et lodret linjestykke, er det jo ikke så mærkeligt.

Hvad angår $x < 1$, er problemet, at vi ikke tidligere har tilladt integraler, hvor den øverste grænse ligger under den nederste, men helt generelt defineres

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad a > b.$$

Med denne udvidelse af integralbegrebet er det let at vise, at resultatet om $A(x)$ som stamfunktion stadig gælder.

Da $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ for alle $x > 0$, har vi

Funktionen \ln er voksende

Sætning

Den naturlige logaritmefunktion \ln opfylder, at

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

for alle positive tal a, b .

Bevis

Vi får den geniale ide at se på funktionen

$$f_a(x) = \ln(a \cdot x), \quad x > 0$$

Ifølge sætningen på side 1 er f_a differentiabel og

$$(\ln(ax))' = a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Men hovsa, det er virkelig interessant, for det viser jo, at $f_a(x) = \ln(a \cdot x)$ er en stamfunktion til $\frac{1}{x}$. Og det var $\ln(x)$ også, og vi har tidligere set, at forskellen på to stamfunktioner er konstant, altså

$$\ln(a \cdot x) = \ln(x) + k$$

Vi indsætter tallet b på x ' plads og får

$$\ln(a \cdot 1) = \ln(1) + k \Leftrightarrow k = \ln(a)$$

Her benyttede vi, at $\ln(1) = 0$, og det er i sig selv vigtigt at huske, men eftersom det er arealet af et lodret linjestykke, er det jo ikke så mærkeligt.

Vi indsætter nu den fundne k -værdi, og får så

$$\ln(a \cdot x) = \ln(x) + \ln(a), \quad x > 0$$

Ligningen gælder for alle positive x -værdier, men vi er kun interesseret i $x = b$, som giver

$$\ln(a \cdot b) = \ln(b) + \ln(a),$$

Og det var jo præcis det, vi gerne ville vise.

Pyha, det var hårdt? Men bare roligt, når man har vist, at **"den naturlige logaritme \ln laver gange om til plus"**, får man en masse næsten gratis sidegevinster.

Sætning

Den naturlige logaritmefunktion \ln opfylder, at

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

for alle positive tal a, b .

Bevis

Vi benytter produktreglen for den naturlige logaritme.

$$\ln\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b) \Leftrightarrow \ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b) \Leftrightarrow \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Det var det. Let og elefant;)

Men vi er ikke færdige med at høste endnu.

Sætning

Den naturlige logaritmefunktion \ln opfylder, at

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$$

for alle positive tal a og alle naturlige tal n .

Bevis

For $n = 1$ er der intet at vise, for $\ln(a^1) = 1 \cdot \ln(a)$ er svær at bortforklare.

For $n = 2$ får vi

$$\ln(a^2) = \ln(a \cdot a) = \ln(a) + \ln(a) = 2\ln(a)$$

Det midterste lighedstegn skyldes produktreglen for den naturlige logaritme.

For $n = 3$ får vi

$$\ln(a^3) = \ln(a \cdot a^2) = \ln(a) + \ln(a^2) = \ln(a) + 2\ln(a) = 3\ln(a).$$

Det 2. lighedstegn skyldes produktreglen for den naturlige logaritme, det 3. skyldes at vi lige har vist reglen for $n = 2$.

For $n = 4$ får vi

$$\ln(a^4) = \ln(a \cdot a^3) = \ln(a) + \ln(a^3) = \ln(a) + 3\ln(a) = 4\ln(a).$$

Det 2. lighedstegn skyldes produktreglen for den naturlige logaritme, det 3. skyldes at vi lige har vist reglen for $n = 3$.

Og sådan kan man fortsætte, så længe man orker.

Sætning

Den naturlige logaritmefunktion \ln opfylder, at

$$\ln(a^{-n}) = -n \cdot \ln(a)$$

for alle positive tal a og naturlige tal n .

Bevis

$$\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = \ln(1) - \ln(a^n) = -\ln(a^n) = -n \cdot \ln(a).$$

Det 1. lighedstegn skyldes definitionen på a^{-n} , det 2. produktreglen, det 3. at $\ln(1) = 0$, det 4. reglen fra før.

Da $\ln(a^0) = 0 \cdot \ln(a) \Leftrightarrow \ln(1) = 0$, har vi nu vist

Sætning

Den naturlige logaritmefunktion \ln opfylder, at

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$$

for alle positive tal a og alle hele tal n .

Denne sætning har en spændende konsekvens: hvis bare vi vælger $a \neq 1$, vil $\ln(a) \neq 0$. Alle tallene $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$ ligger i værdimængden for den naturlige logaritmefunktion. Da \ln er kontinuert (overvej!) vil værdimængden for \ln også indeholde alle tallene mellem $n \cdot \ln(a)$. Men tallene $n \cdot \ln(a)$ ligger jævnt fordelt på den reelle akse. Altså består værdimængden af alle reelle tal

Sætning

Værdimængden for den naturlige logaritmefunktion \ln er alle reelle tal:

$$Vm(\ln) = \mathbb{R}.$$

Specielt findes der ét tal, hvis naturlige logaritme giver 1 (forskellige tal har forskellige logaritmer, da logaritmefunktionen er voksende, så der kan kun være ét tal med egenskaben). Det tal optræder mange steder i matematikken, det har derfor fået sit eget navn. Tallet hedder e opkaldt efter den schweiziske matematiker Leonhard Euler.

$$\ln(e) = 1$$

Men hvorfor stoppe med hele tal?

Sætning

Den naturlige logaritmefunktion \ln opfylder, at

$$\ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q} \cdot \ln(a)$$

for alle positive tal a og alle naturlige tal q .

Bevis

Vi benytter at vi kan omskrive tallet a til $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q$

$$a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q$$

⇔

$$\ln(a) = \ln\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)$$

⇔

$$\ln(a) = q \cdot \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$$

⇔

$$\frac{1}{q} \ln(a) = \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$$

Sætning

Den naturlige logaritmefunktion \ln opfylder, at

$$\ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} \cdot \ln(a)$$

for alle positive tal a , alle hele tal p og alle naturlige tal q .

Bevis

$$\ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \ln\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = p \cdot \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = p \cdot \frac{1}{q} \ln(a) = \frac{p}{q} \ln(a)$$

Det 2. lighedstegn skyldes, at vi har vist, at ”hele potenser ryger ned foran \ln ”. Det 3. at vi har vist, at brøker med 1 i tælleren også gør det.

Vi har alt i alt vist, at den naturlige logaritmefunktion har den ekstremt vigtige egenskab, at den kan ”pille potenser ned”

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$$

for alle positive tal a og alle rationale tal x .

Når vi kun har set på rationale værdier af x , er der en naturlig forklaring. Vi har nemlig kun defineret a^x for rationale eksponenter.

Men hvis x er et vilkårligt reelt tal, kan vi udregne $x \cdot \ln(a)$. Da \ln er voksende og værdimængden for \ln er alle reelle tal, findes der præcis ét tal y , så

$$\ln(y) = x \cdot \ln(a)$$

Hvis vi beslutter os for at kalde dette tal y for a^x , er reglen

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$$

opfyldt for alle reelle tal, så det gør vi!

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$$

for alle positive tal a og alle reelle tal x .